

2024년 서울과학고 1-1 중간고사 수학(상,하)

시험 범위

다항식~복소수, 집합~명제

1. 실수 x, y, z, t 가 다음 조건을 만족시킬 때, 모든 실수 t 의 범위와 $xy+yz+zx$ 의 최솟값과 그때의 x, y, z 의 값을 각각 구하시오. [10점]

(가) $x+y+z+2t=6$

(나) $x^2+y^2+z^2+4t^2=12$

2. 복소수 z, α 가 다음과 같다.

$z = a + bi,$

$\alpha = (a^4 - 6a^2b^2 + b^4 + a^2 - b^2) + \{4ab(a^2 - b^2) + 2ab\}i$

다음 물음에 답하시오. (단, a, b 는 실수) [10점]

(1) α 를 z 또는 \bar{z} 에 관한 식으로 나타내시오. [8점]

(2) $z \neq 1, z^5 = 1$ 일 때, $\text{Re}(\alpha)$ 의 값을 구하시오. [7점]

3. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 연산 Δ 를 $A\Delta B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$ 로 정의한다. 다음 명제의 참, 거짓을 판단하시오. 참이면 증명하고, 거짓이면 반례를 제시하고 반례가 되는 이유를 설명하시오. (단, 참임을 증명할 때는 [보기]의 성질만을 이용하며, 반드시 한 번에 한 개의 성질만을 이용하고 사용 한 성질의 번호를 적으시오.) [12점]

[보기]

- ① 연산 Δ 의 정의
- ② $X \cap Y = Y \cap X$
- ③ $X \cup Y = Y \cup X$
- ④ $(X^c)^c = X$
- ⑤ $(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$
- ⑥ $(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c$ (단, X, Y 는 U 의 부분집합)

(1) $A\Delta B = B\Delta A$ [3점]

(2) $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$ [3점]

(3) $A\Delta(B \cap C) = (A\Delta B) \cap (A\Delta C)$ [3점]

(4) $(A\Delta B)^c = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$ [3점]

2024년 서울과학고 1-1 중간고사 수학(상,하)

4. 다음 물음에 답하시오. [13점]

(1) $(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 - x - 1)P + (x^4 - 1)Q = x + 1$ 을 만족하는 계수가 실수인 다항식 P, Q 의 순서쌍 (P, Q) 를 하나 구하고 그 과정을 설명하시오. [5점]

(2) $(x^6 - x^4 + x^3 - x^2)R + (x^4 - 1)S + k(x^2 + x - 1) = 1$ 을 만족하는 계수가 실수인 다항식 R, S 와 실수 k 의 순서쌍 (R, S, k) 를 하나 구하고 그 과정을 설명하시오. (단, k 는 상수이다.) [8점]

5. 다음 물음에 답하시오. [12점]

(1) x 에 대한 사차방정식 $x^4 + (a-1)x^2 + 2a^2 - 8a + 6 = 0$ 의 두 근은 실수이고, 다른 두 근은 허수가 되도록 하는 모든 실수 a 의 값의 범위를 구하시오. [5점]

(2) 다음을 만족시키는 서로 다른 자연수 a, b, c, d 의 순서쌍 (a, b, c, d) 를 모두 구하시오. (단, $a < b < c < d$) [7점]

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{5}{3}$$

2024년 서울과학고 1-1 중간고사 수학(상,하)

6. 2보다 큰 자연수 n 에 대하여 \sqrt{n} 은 무리수일 때, 실수 전체 집합의 부분집합 S_n, T_n 를

$$S_n = \{a + b\sqrt{n} \mid a, b \text{는 정수}\}$$

$$T_n = \{an + b\sqrt{n} \mid a, b \text{는 정수}\} \text{라 하자.}$$

(단, 필요하다면 S_n, T_n 는 덧셈과 곱셈에 대하여 모두 닫혀 있음을 증명 없이 사용하여도 좋다.) [12점]

(1) 다음 조건을 만족하는 S_3 의 부분집합 A 가 있다고 하자. [7점]

$$A \text{의 임의의 원소 } a, b \text{에 대하여, } a - b \in A$$

$T_3 \subset A$ 이고 $A \neq T_3$ 이면, $A = S_3$ 임을 보이시오.

(2) n 에 대한 다음 조건은 $n=l$ 일 때 참이고, $n=m$ 일 때 거짓이다.

$$S_n \text{의 임의의 원소 } r_1, r_2 \text{에 대하여 } r_1 r_2 \in T_n \text{이고 } r_1 \notin T_n \text{이면, } r_2 \in T_n \text{이다.}$$

가능한 l 과 m 의 값을 각각 하나씩 찾고 이를 정당화하시오. [6점]

7. 전체집합 $A = \{n \mid n \text{은 } 10 \text{이하의 자연수}\}$ 의 원소 x, y 에 대하여 세 조건 $p(x, y), q(x), r(x)$ 는 다음과 같다.

$$p(x, y): x \text{를 } y \text{로 나눈 나머지는 } 4 \text{이하이다.}$$

$$q(x): \forall y, p(x, y)$$

$$r(x): \forall y, p(y, x)$$

다음 물음에 답하시오. [11점]

(1) 집합 $B = \{y \in A \mid \exists x, p(x, y) \text{가 참}\}$ 의 모든 원소의 합을 구하시오. [4점]

(2) 다음 조건을 만족시키는 조건 $s(x)$ 의 진리집합의 모든 원소의 합의 최솟값을 구하시오. [7점]

$$(가) [\forall x, r(x) \rightarrow \{\sim q(x) \vee \sim s(x)\}] \text{는 거짓}$$

$$(나) [\forall x, \sim s(x) \rightarrow \{q(x) \rightarrow r(x)\}] \text{는 참}$$

2024년 서울과학고 1-1 중간고사 수학(상,하)

8. 다항식 $A_m(x)$ 을 다항식 $B(x)(B(x) \neq 0)$ 로 나눈 몫을 $Q_m(x)$, 나머지를 $R_m(x)(m=1, 2)$ 라 할 때, 다음 물음에 답하십시오. [14점]

(1) 다음 명제의 참, 거짓을 판별하고 설명하십시오. [2점]

상수 c 에 대하여 다항식 $cA_1(x)$ 를 다항식 $B(x)$ 로 나눈 몫은 $cQ_1(x)$, 나머지는 $cR_1(x)$ 이다.

(2) 다음 명제의 참, 거짓을 판별하고 설명하십시오. [2점]

다항식 $A_1(x)+A_2(x)$ 를 다항식 $B(x)$ 로 나눈 몫은 $Q_1(x)+Q_2(x)$, 나머지는 $R_1(x)+R_2(x)$ 이다.

(3) 다음 명제의 참, 거짓을 판별하고 설명하십시오. [2점]

다항식 $A_1(x)A_2(x)$ 를 다항식 $B(x)$ 로 나눈 몫은 $B(x)Q_1(x)Q_2(x)+Q_1(x)R_2(x)+Q_2(x)R_1(x)$, 나머지는 $R_1(x)R_2(x)$ 이다.

(4) 정수 n 에 대하여 다항식 $f(x)$ 를 x^3-2x-1 로 나눈 나머지는 x^2+nx-2 이다. 다항식 $f(x)g(x)$ 를 x^3-2x-1 로 나눈 나머지가 $\alpha x+4$ (α 는 실수)가 되도록 하는 실계수 다항식 $g(x)=ax^2+bx+c$ 가 무수히 많을 때, 상수 n, α 의 값을 각각 구하십시오. [8점]

수고하셨습니다.